Convexité

Convexité

Prouver une inegalite avec convexité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en -1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$

Property of Studeo LLC

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 2x^2$

a) f est bien dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 6x - 4$

$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$f''(x) < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

Conclusion : f est concave sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$

f est convexe sur $]\frac{3}{2} ; +\infty[$

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en -1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$

$f'(-1) = 3 \times 1 + 4 = 7 \qquad f(-1) = -1 - 2 = -3$

Equation de la tangente à f en -1 :

$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = 7(x+1) - 3$

$= 7x + 4$

Studeo.

$\Rightarrow$ $y = 7x + 4$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$

a) Étudier la convexité de la fonction f.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en -1.

c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$

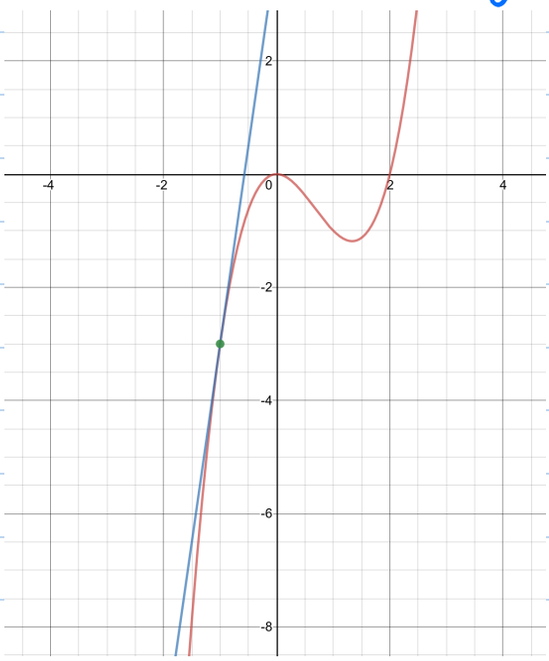
Analyser l'expression !! → "En déduire"

$x^3 - 2x^2$ → $f(x)$

$7x + 4$ → équation de la tangente en -1

Interprétation géométrique de $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$

= "$\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la tangente"



Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes : Penser à la convexité !

On sait que f est concave sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ et donc sur $\mathbb{R}^-$

Astuce #1

Penser à la convexité quand il faut comparer la position d'une courbe par rapport à sa tangente

Studeo.

Donc $\mathcal{C}_f$ est située sous toutes ses tangentes sur cet intervalle
En particulier la tangente en -1

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$

Studeo.