

Continuité

Limite d'une suite avec continuité 2

Soit la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

1. a) Justifier que f est continue sur I .
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I .
c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. Soit la suite $u_0 = 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} < 3$
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ .

Property of Studeo LLC

1) a) f est continue sur I comme quotient de fonctions continues sur I .

b) $\forall x \in I, f(x) = x$

$$\Rightarrow x = \frac{2x+1}{x+2}$$

possible car $x \neq -2$

$$\Rightarrow (x+2)x = 2x+1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Erreur type #1

Ne pas oublier la solution négative d'une équation du type

$$x^2 = a, a > 0$$

c) f dérivable sur I comme quotient de telles fonctions

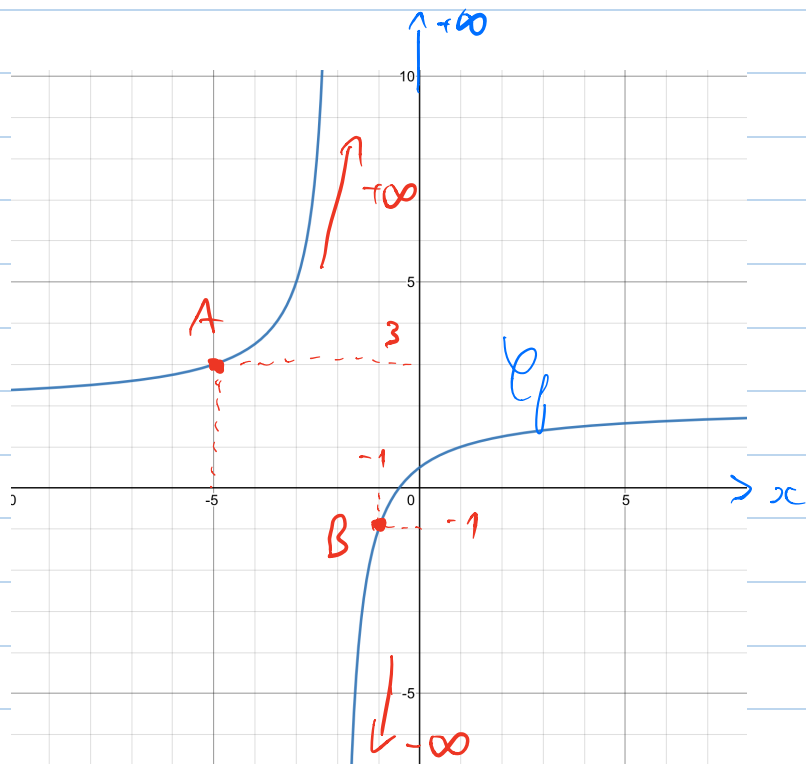
$$\text{et } \forall x \in I, f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \quad \forall x \in I$$

Attention : f n'est pas définie en -2

$\rightarrow$ Donc f est croissante sur $] -\infty; -2[$ et sur $] 2; +\infty[$

Ne pas dire qu'elle est croissante sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$!!!



f croissante sur $I \Rightarrow \forall (x, y) \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Considérons les points $A(-5; 3)$ et $B(-1, -1)$

A et $B \in C_f$

$$x_A < x_B$$

mais

$$y_A = f(x_A)$$

$>$

$$y_B = f(x_B)$$

Conclusion : Ne pas dire f est croissante sur I

Soit la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

1. a) Justifier que f est continue sur I .
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I .
c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. Soit la suite $u_0 = 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} < 3$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ .

2) a) $P_n : "0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} < 3"$
Montrons que P_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

pas de " $\forall n \in \mathbb{N}$ " dans P_n

I: $u_0 = 0 \rightarrow P_0$ est fausse
 $u_1 = f(0) = 1$
 $u_2 = f(u_1) = \frac{3}{2}$

On a bien $0,5 \leq u_1 \leq u_2 < 3$

$\rightarrow$ OK pour l'initialisation

H: Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque fixé $n \geq 1$

cad: $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} < 3 \rightarrow$ ce que l'on suppose

Montrons que P_{n+1} est vraie

cad: $0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 3$

écrire P_n
et P_{n+1}

ce qu'on veut
montrer

Astuce #1

Pour l'hérédité d'une démonstration par récurrence, écrire explicitement P_n et P_{n+1}

→ Penser à utiliser la croissance de f !

f est croissante sur $]-2; +\infty[$

$$0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} < 3$$

$$\Rightarrow f(0,5) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(3)$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$

$0,5 < \frac{4}{5}$ $= u_{n+1}$ $= u_{n+2}$ $\frac{7}{5} < 3$

$$\Rightarrow 0,5 \leq \frac{4}{5} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \frac{7}{5} < 3$$

$$\Rightarrow 0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 3$$

→ Hérité OK

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} < 3$

b) D'après l'inégalité précédente : on en déduit

- u_n est croissante
 - u_n est majorée
- $\Rightarrow u_n$ est convergente vers une limite l

Comme u_n vérifie : $u_{n+1} = f(u_n)$

l est solution de l'équation $f(x) = x$

car f est continue

$$f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \text{ si } f \text{ est continue}$$

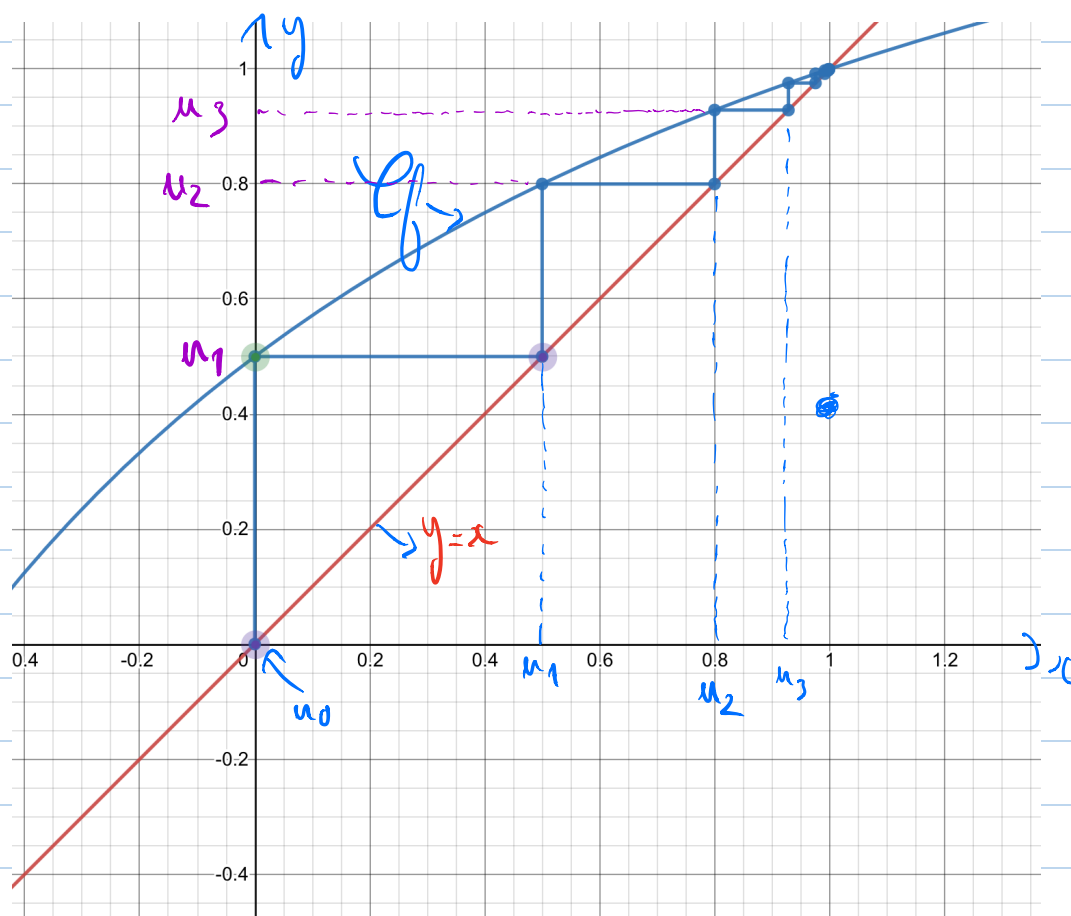
Donc d'après 1b), $l = 1$ ou $l = -1$

Mais $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $0,5 \leq u_m \leq u_{m+1} < 3$

donc par passage à la limite $0,5 \leq l \leq 3$

par passage à la limite les inégalités deviennent larges

Donc la seule solution possible est $l = 1$



Contre exemple

$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 1 \\ g(1) = 0,4 \end{array} \right\} \rightarrow g \text{ n'est pas continue}$

On définit u_n / $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

u_n converge toujours vers 1

Mais 1 n'est plus solution de $g(x) = x$
car $g(1) = 0,4$