

Continuité

Prolongement par continuité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Tracer sur une calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0?
2. Démontrer cette conjecture.

Property of Studeo LLC

Méthode

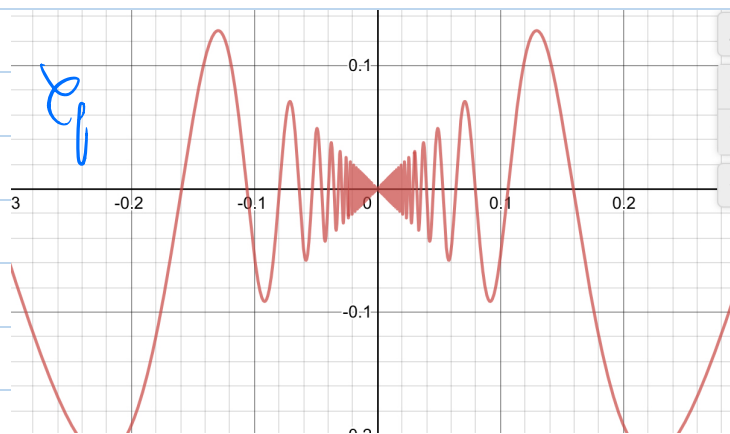
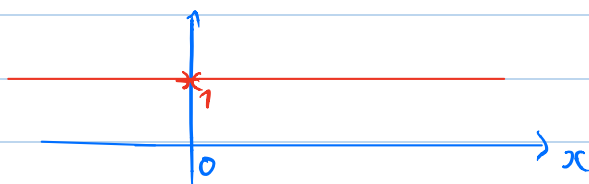
Le prolongement par continuité en a :

- $f(a)$ n'est pas définie
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est finie

→ On peut alors prolonger f en a et poser

$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ → La fonction est alors définie et continue en a .

Exemple : $f(x) = \frac{x}{x}$



1) On peut conjecturer que f est continue en 0

$$\text{car } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{il semble.}$$

2)

Pour démontrer des limites de fonctions contenant des cosinus ou des sinus

→ Théorème d'encadrement

$$\forall x \neq 0 \quad -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$$

Conclusion : f est bien continue en 0

