Continuité

Fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = [0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{10x}{e^x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel de I: $f'(x) = \frac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.
2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.
   b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire le tableau de variations de f sur 1. On admettra que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Property of Studeo LLC

1) $\forall x \in I$, $f(x) = \frac{10x}{e^x+1} > 0 \quad \forall x \in I$

f est bien définie et dérivable sur I, comme quotient de telles fonctions.

f de la forme $\frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\forall x \in I$, $f'(x) = \frac{10(e^x+1) - 10x(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{10}{(e^x+1)^2}((1-x)e^x+1)$

$\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{10}{(e^x+1)^2} g(x)$ avec $g(x) = (1-x)e^x + 1$

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = [0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{10x}{e^x+1}$. \right.

1. Démontrer que pour tout réel de I: $f'(x) = \frac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.
2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.
   b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire le tableau de variations de f sur 1. On admettra que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Property of Studeo LLC

2) a) Cette question est du type : montrer qu'il existe un unique antécédant

$\Rightarrow$ TVI

Studeo.

Hypothèses du TVI :

- g est bien continue sur I (comme produit et somme de fonctions continues)

- $g(0) = 2$

- $g(x) = (1-x)\, e^{x} + 1$

  $(1-x) \to -\infty$; $e^{x} \to +\infty$ (quand $x \to +\infty$)

Par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Pour avoir l'unicité de l'antécédent, il faut prouver la stricte monotonie de la fonction.

Erreur type #1

Bien montrer la stricte monotonie de la fonction en utilisant le TVI pour démontrer l'unicité de l'antécédent

g est bien dérivable sur I (fonctions usuelles)

$\forall x \in I, \quad g'(x) = -1\, e^{x} + (1-x)\, e^{x}$

$= -x\, e^{x}$

($x > 0$, $e^{x} > 0$)

Donc $\forall x \in I, \quad g'(x) < 0 \Rightarrow g$ est strictement décroissante sur I (!!!!)

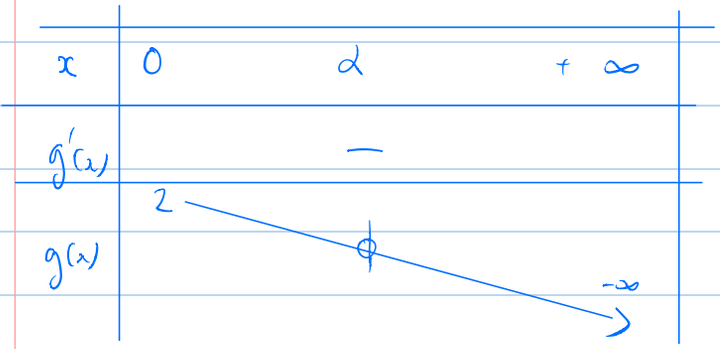
$0 \in \,]-\infty \,; 2[$

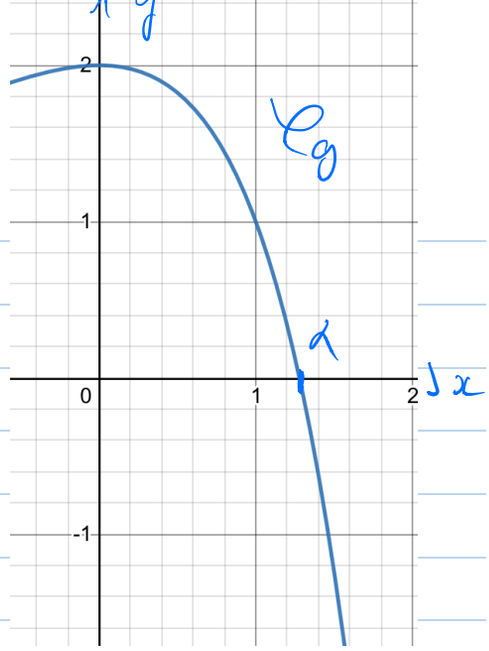
(avec $-\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $2 = g(0)$)

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones

il existe un unique réel $\alpha \in I \;/\; g(\alpha) = 0$

Studeo.





Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = [0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{10x}{e^x+1}$. \right.

1. Démontrer que pour tout réel de I: $f'(x) = \frac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.
2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.
   b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire le tableau de variations de f sur 1. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Property of Studeo LLC

2) b) On trouve $\boxed{\alpha \simeq 1,28}$ $1,28 \leq \alpha \leq 1,29$

c) $\forall x \in [0, \alpha]$, $g(x) \geq 0$
$\forall x \in [\alpha; +\infty[$, $g(x) \leq 0$

3) On en déduit le tableau de variation de f

f' est du signe de g, $f'(x) = \frac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ $\rightarrow > 0$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{10\alpha}{(\alpha+1)}$	↘	0

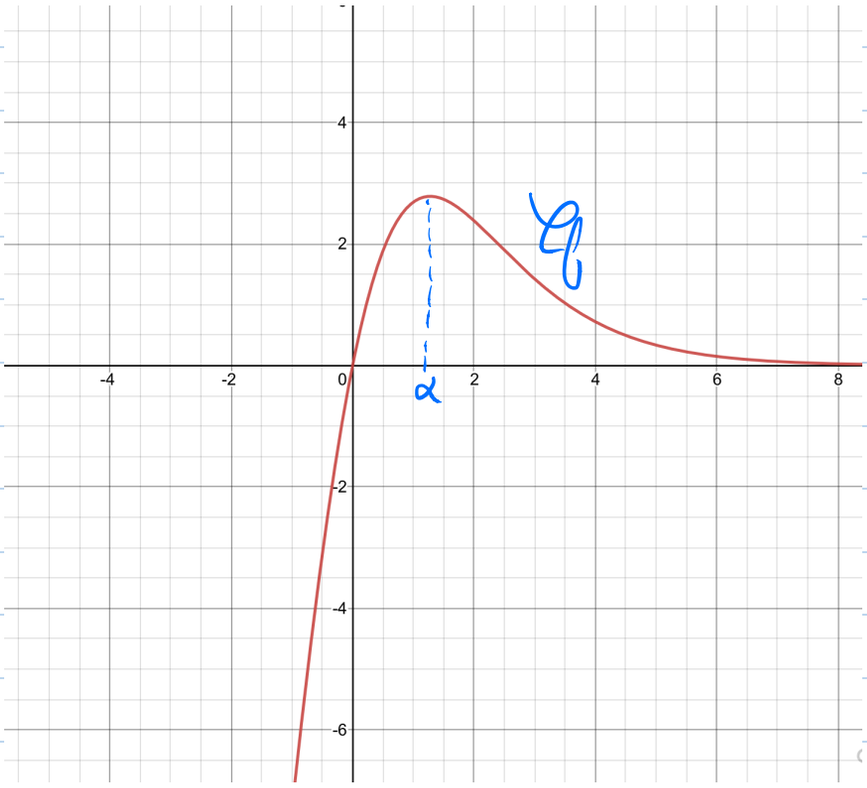
$f(0) = 0$

Studeo.

$f(x) = \dfrac{10x}{e^x + 1}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \dfrac{e^x + 1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

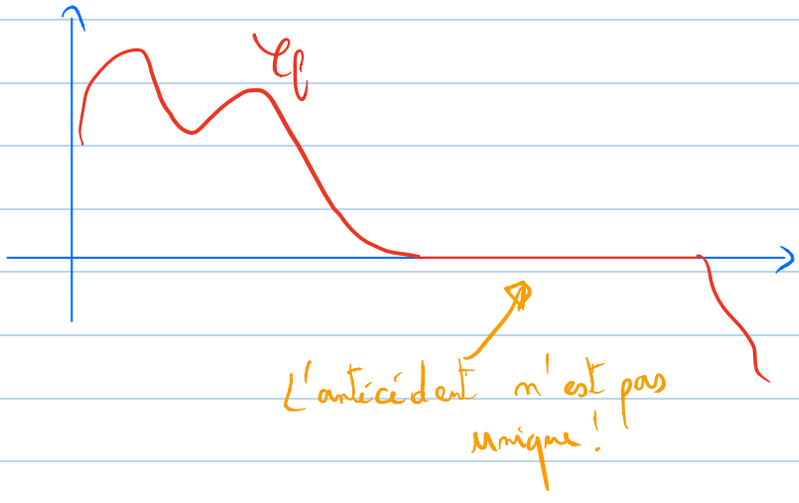
Donc en passant à l'inverse $\dfrac{x}{e^x + 1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$



Remarque : Pourquoi la stricte monotonie est essentielle ?

Exemple



Studeo.