Limites fonctions

Définitions

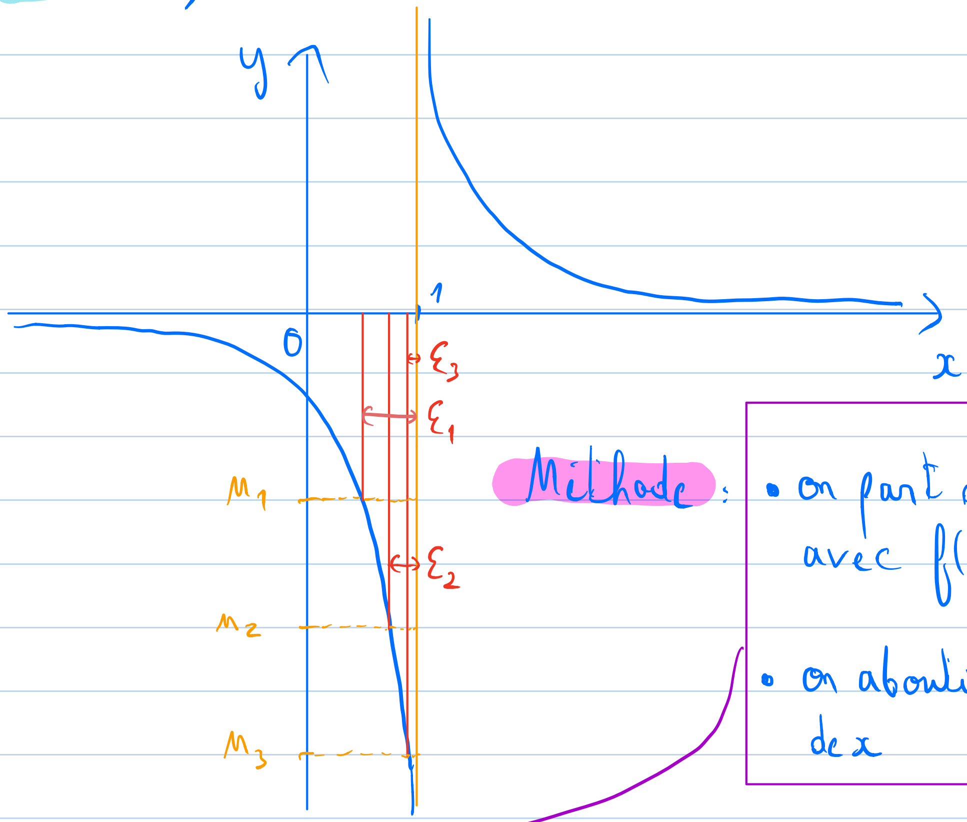
Calcul de limite finie avec la définition (trouver un epsilon)

En utilisant les définitions du cours, démontrer la proposition suivante.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Définition avec des ε : On pose $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$\forall M < 0, \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ 1 - \varepsilon \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) < M$



Méthode :

- on part de l'inégalité avec $f(x)$
- on aboutit à un encadrement de x

Soit $M < 0$, $x < 1$ → car on s'intéresse à la limite en 1^-

Erreur type #1

Vérifier quand on passe à l'inverse dans une inégalité que l'on est bien sur R*- ou R*+

$f(x) \leq M \Rightarrow \frac{1}{x-1} < M < 0$

$\Rightarrow x - 1 > \frac{1}{M}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$

$\Rightarrow x > 1 + \frac{1}{M}$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{M} < x < 1$

⚠ $n < 0$

L'encadrement $1 + \frac{1}{n} < x < 1$

est bien de la forme $1 - \varepsilon < x < 1$

ou $x \in \left]1-\varepsilon\,;1\right[$

avec $\varepsilon = -\frac{1}{n} > 0$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty}$