

Dé montrer, en utilisant les définitions que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty.$$

Définition de la limite en $+\infty$

$$\forall M > 0, \exists A \in \mathbb{R} / x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$$



Pour $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Soit $M > 0$. Le A qu'on cherche dépend de M

$$\begin{aligned} f(x) > M &\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} > M \\ &\Rightarrow x^2 - 1 > M^2 \\ &\Rightarrow x^2 > M^2 + 1 \\ &\Rightarrow x > \sqrt{M^2 + 1} \quad (\text{ou } x < -\sqrt{M^2 + 1}) \end{aligned}$$

On peut prendre $A = \sqrt{M^2 + 1}$

cela ne nous intéresse pas
on regarde la limite en $+\infty$

Dans ce cas : $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

