Conjecturer une formule explicite puis démontrer avec récurrence

Calculer la somme des entiers de 1 à n.

Astuce #1

On doit connaître le résultat qu'on veut démontrer pour faire une démonstration par récurrence

Remarque importante :

Pour la démonstration par récurrence, on doit connaître le résultat qu'on veut démontrer !

Hypothèse : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Démontrons ce résultat par récurrence

P_n : $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ → pas de $\forall n$ dans P_n

Montrons que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

La propriété à démontrer peut ne pas être vraie pour $n=0$ et/ou $n=1$

① Initialisation :

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow \text{OK}$$

② Hérédité :

- Supposons P_n vraie pour un rang n quelconque fixé c'est à dire :

$$1+2+\ldots+n = \frac{(n)(n+1)}{2}$$ → on écrit ce qu'on suppose !

- Sous cette hypothèse, montrons que P_{n+1} vraie, c'est-à-dire

$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ → on écrit ce qu'on veut montrer !!

Méthode : il faut utiliser l'hypothèse de récurrence pour aboutir au résultat.

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

hypothèse de récurrence → $= \frac{(n)(n+1)}{2}$

$$= \frac{(n)(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Hérédité OK.

Conclusion : D'après le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$